Курс «Дополнительные главы дискретной математики и кибернетики» для бакалавров (интегрированных магистров) направления 01400 «Прикладная математика и информатика» профиля «Математические методы обработки информации и принятия решений»

1. Общая информация (учебная нагрузка, формы контроля и др.)

Курс является обязательным для всех бакалавров (интегрированных магистров) направления 01400 «Прикладная математика и информатика» профиля «Математические методы обработки информации и принятия решений».

Для бакалавров 4 курса профиля «Математические методы обработки информации и принятия решений» (311–319 группы) курс «Дополнительные главы дискретной математики и кибернетики» читается в 7 семестре в объёме 3 часов лекций и 2 часов семинарских занятий в неделю. Курс завершается экзаменом, на который выносятся как теоретические вопросы, изложенные на лекциях, так и задачи, рассмотренные на семинарских занятиях.

В разделах 2–6, 9 данного описания приводится подробная информация о содержании курса, программе и планах его изучения в 2020–2021 уч. году, методических материалах, а в разделах 7 и 8 — об особенностях организации учебного процесса, формах и сроках проведения контрольных мероприятий.

В соответствии с этими планами в течение семестра проводятся 3 основные (по 2 часа) контрольные работы и, возможно, несколько промежуточных (до 1 часа). По результатам контрольных с учётом посещаемости студентов, их работы на лекциях и семинарах выставляется предварительная оценка, которая играет существенную роль при формировании окончательной оценки на экзамене (см. раздел 8).

Чтение курса обеспечивается кафедрой математической кибернетики, лекторы 2020–2021 учебного года — профессор С. С. Марченков (ssmarchen@yandex.ru) и профессор С. А. Ложкин (lozhkin@cs.msu.ru).

2. Аннотация

Курс «Дополнительные главы дискретной математики и кибернетики» (ранее «Дополнительные главы дискретной математики») является продолжением курсов «Дискретная математика» и «Основы кибернетики» и посвящён рассмотрению классических вычислительных моделей в теории алгоритмов, связанных с распознаванием множеств и вычислением функций, элементам теории сложности алгоритмов и теории дискретных управляющих систем.

В курсе изучаются модели конечных автоматов (распознавателей и преобразователей) и машин Тьюринга, рассматривается техника преобразований этих устройств и вычислений на этих устройствах. Для каждого из устройств приводится эквивалентный алгебраический формализм: правоинвариантные отношения эквивалентности, регулярные выражения, функциональная система с операциями суперпозиции и введения обратной связи над автоматными функциями, формализм Клини для класса частично-рекурсивных функций. Для каждого из случаев доказывается эквивалентность алгебраического и автоматного (машинного) подходов к определению класса множеств или функций. Рассматриваются сложностные классы P и NP, вводится понятие NP-полноты, доказывается полиномиальная разрешимость и устанавливается NP-полнота ряда задач.

Излагаются методы синтеза схем для функций алгебры логики (ФАЛ) из специальных классов и для не всюду определённых ФАЛ, устанавливаются нижние мощностные оценки функций Шеннона для сложности реализации ФАЛ из этих классов. Изучается сложность некоторых «индивидуальных» ФАЛ. Исследуется связь между схемной и алгоритмической сложностью ФАЛ.

3. Программа

I. Конечные автоматы

Конечные автоматы-распознаватели и конечно-автоматные множества слов, задание автоматов диаграммами Мура и каноническими уравнениями. Правоинвариантное отношение эквивалентности, его связь с конечно-автоматными множествами. Замкнутость класса конечно-автоматных множеств относительно теоретико-множественных операций. Недетерминированные автоматы, процедура детерминизации. Операции произведения и итерации, замкнутость класса конечно-автоматных множеств относительно операций произведения и итерации. Регулярные выражения и регулярные множества, совпадение классов регулярных и конечно-автоматных множества.

Детерминированные функции, их определение с помощью бесконечных деревьев, вес дерева. Конечные автоматы-преобразователи, их задание диаграммами Мура и каноническими уравнениями. Замкнутость класса конечно-автоматных функций относительно операции суперпозиции. Зависимость с запаздыванием, операция введения обратной связи, замкнутость класса конечно-автоматных функций относительно операции введения обратной связи. Схемы из автоматных элементов, реализация конечно-автоматных функций схемами из автоматных элементов. Существование конечных полных систем в классе конечно-автоматных функций.

II. Машины Тьюринга и вычислимые функции

Машины Тьюринга, функции, вычислимые на машинах Тьюринга. Операции композиции и итерации над машинами Тьюринга. Моделирование машин Тьюринга. Существование универсальной машины Тьюринга.

Операции суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации над частичными функциями. Замкнутость класса функций, вычислимых на машинах Тьюринга, относительно операций суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. Примитивно-рекурсивные функции, примитивная рекурсивность простейших арифметических функций. Частично-рекурсивные функции, примеры не всюду определенных чистично-рекурсивных функций. Совпадение класса частично-рекурсивных функций с классом функций, вычислимых на машинах Тьюринга, теорема Клини.

Сложностные классы P и NP. Полиномиальная сводимость, NP-полнота. NP-полнота задачи выполнимости КНФ и задачи выполнимости 3-КНФ. Полиномиальная разрешимость задачи выполнимости 2-КНФ.

III. Сложность структурной реализации функций алгебры логики из некоторых классов

Задача синтеза схем для функций алгебры логики (ФАЛ) из специальных классов. Мощностная классификация специальных классов ФАЛ и нижние мощностные оценки связанных с ними функций Шеннона. Инвариантные и квазиинвариантные классы ФАЛ, их метрические свойства и структурное описание.

Асимптотически оптимальные методы синтеза схем для (ненулевых) квазиинвариантных классов. Синтез схем для ФАЛ из специальных классов на основе их «погружения» в квазиинвариантные классы и на основе принципа локального кодирования О. Б. Лупанова.

Задача синтеза схем для неоднозначно заданных ФАЛ и, в частности, для не всюду определённых ФАЛ. Асимптотически оптимальные методы синтеза схем для не всюду определённых ФАЛ.

Задача синтеза схем для «индивидуальных» ФАЛ и проблема получения нижних оценок их сложности. Теорема Храпченко о сложности реализации ФАЛ в классе π-схем. Схемная и алгоритмическая сложность функций, гипотеза С. В. Яблонского и теорема Дж. Сэвиджа.

4. Предварительный список вопросов к экзамену по курсу «Дополнительные главы дискретной математики и кибернетики» (осенний семестр 2020–2021 уч. года; 311–319 группы)

I. Конечные автоматы

1. Конечный автомат-распознаватель, конечно-автоматное множество. [1, с. 27–28]
2. Правоинвариантное отношение эквивалентности, связь с конечно-автоматными множествами. [1, с. 29–31]
3. Замкнутость класса конечно-автоматных множеств относительно теоретико-множественных операций. [1, с. 32–33]
4. Недетерминированные автоматы, процедура детерминизации. [1, с. 34–36]
5. Операции произведение и итерации. Замкнутость конечно-автоматных множеств относительно операций произведения и итерации. [1, с. 37–39]
6. Регулярные выражения и регулярные множества. [1, с. 40]
7. Теорема Клини. [1, с. 40–42]
8. Детерминированные функции. Задание детерминированных функций деревьями. Вес дерева. [2, с. 74–85]
9. Канонические уравнения, векторная и скалярная формы канонических уравнений. [2, с. 88–91]
10. Замкнутость класса конечно-автоматных функций относительно операции суперпозиции. [2, с. 92–94], [1, с. 57–59]
11. Зависимость с запаздыванием. Операция введения обратной связи. [2, с. 94–96, 98–102]
12. Существование конечных полных систем в классе конечно-автоматных функций. [2, с. 105–108], [1, с. 60–61]

II. Машины Тьюринга и вычислимые функции

13. Машины Тьюринга. Функции, вычислимые на машинах Тьюринга. [1, с. 65–68]
14. Операции композиции и итерации над машинами Тьюринга. [1, с. 70–72]
15. Моделирование машин Тьюринга. [1, с. 74–77]
16. Универсальная машина Тьюринга. [1, с. 84–86]
17. Операции суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. [1, с. 77–79]
18. Замкнутость класса функций, вычислимых на машинах Тьюринга, относитеьо операций суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. [1, с. 80–83]
19. Класс примитивно-рекурсивных функций. Простейшие примитивно-рекурсивные функции. [1, с. 102–105]
20. Класс частично-рекурсивных функций. Примеры частично-рекурсивных функций. [1, с. 79, 108–109]

21. Частичная рекурсивность вычислимых функций. Формула Клини. [1, с. 114–117]

22. Классы P и NP. Примеры задач из класса NP. [1, с. 89–93]

23. NP-полнота. Теорема Кука. [1, с. 95–99]

24. NP-полнота задачи 3-ВЫП. [1, с. 99–100]

25. Полиномиальная разрешимость задачи 2-ВЫП. [1, с. 101–102]

III. Сложность структурной реализации функций алгебры логики из некоторых классов

26. Задача синтеза схем для функций (операторов) из специального класса, мощностные нижние оценки функции Шеннона для их сложности в случае невырожденного (ненулевого, квазиинвариантного) класса. [4, §1]

27. Инвариантные классы функций С. В. Яблонского, их описание на языке базовых множеств и порождающих элементов. Теорема о числе инвариантных классов и фрагменты её доказательства. [4, §11]

28. Синтез схем на основе модификации асимптотически наилучшего метода. Стандартные классы и стандартность класса функций, равных нулю на всех наборах значений переменных, номера которых больше заданного числа. [4, §2]

29. Асимптотически наилучший метод синтеза схем для ненулевых квазиинвариантных классов, их стандартность. [4, §3]

30. Общее описание принципа локального кодирования, его применение для доказательства стандартности класса самодвойственных функций. [4, §4]

31. Применение принципа локального кодирования для доказательства стандартности невырожденных классов симметрических операторов, операторов, связанных с вычислением функции на нескольких последовательных наборах. [4, §5]

32. Задача синтеза схем для не всюду определённых функций. Особенности получения нижней мощностной оценки соответствующей функции Шеннона, формулировка теоремы о её асимптотическом поведении. [4, §6]

33. Асимптотически наилучший метод синтеза схем для не всюду определённых функций в случае их «сильной» определённости. [4, §7]

34. Лемма о линейном разделяющем операторе. Асимптотически наилучший метод синтеза схем для не всюду определённых функций в случае их «средней» и «слабой» определённости. [4, §8]

35. Лемма о цепях и сечениях π-схем. Верхние оценки сложности реализации линейных функций в классе π-схем. [4, §9]

36. Теорема Храпченко, нижние оценки сложности линейной функции в классе π-схем. [4, §10]

37. Схемная и алгоритмическая сложность функций, построение сложно реализуемых функций. Гипотеза С. В. Яблонского и теорема Дж. Сэвиджа. [6, с. 42–45]

5. Типовые задачи к экзамену

I. Задачи по конечным автоматам

1. Построить диаграмму Мура конечного автомата, распознающего заданное множество.
2. Используя правоинвариантное отношения эквивалентности, доказать, что заданное множество не является конечно-автоматным.
3. Построить регулярное выражение, определяющее заданное множество.
4. Построить диаграмму Мура конечного автомата, реализующего заданную функцию.
5. По диаграмме Мура построить канонические уранения и схему в стандартном автоматном базисе.
6. По схеме в стандартном автоматном базисе построить канонические уранения и диаграмму Мура.

II. Задачи по машинам Тьюринга и рекурсивным функциям

7. Построить машину Тьюринга, вычисляющую заданную функцию или выполняющую заданное преобразование.
8. Доказать примитивную рекурсивность заданной функции.
9. Применить операцию минимизации к заданной (частичной) функции.
10. Доказать частичную рекурсивность заданной функции.

III. Задачи на сложность реализации функций алгебры логики (ФАЛ)

11. Выяснить, является ли заданный класс ФАЛ инвариантным классом, и, в случае инвариантности этого класса, найти его порождающее множество.
12. Выяснить, является ли заданный класс ФАЛ (операторов) вырожденным, и, в случае его невырожденности, получить нижнюю мощностную оценку функции Шеннона для сложности реализации ФАЛ из этого класса схемами из функциональных элементов (СФЭ) в стандартном базисе.
13. Получить верхнюю (асимптотически точную) оценку функции Шеннона для сложности реализации ФАЛ из заданного специального класса из определённых или не всюду определённых ФАЛ при их реализации СФЭ в стандартном базисе.
14. Получить требуемую нижнюю оценку сложности реализации заданной ФАЛ в классе π-схем.

6. Литература

1. Марченков С. С. Избранные главы дискретной математики. — М.: МАКС Пресс, 2016. — 133 с.
   http://mk.cs.msu.ru/images/2/25/ИзбрГлавыДискрМатем_2015.pdf

2. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2003. — 384 с.

3. Ложкин С. А. Лекции по основам кибернетики. — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова, 2004. — 256 с.

4. Ложкин С. А. Дополнительные главы кибернетики. — МГУ, 2019.
   http://mk.cs.msu.ru/images/0/0b/Dgcyb-lect-190113.pdf

5. Яблонский С. В. Элементы математической кибернетики. — М.: Высшая школа, 2007. — 188 с.

6. Сапоженко А. А. Некоторые вопросы сложности алгоритмов. — М.: Изд-во МГУ, 2001. — 46 с.
   http://mk.cs.msu.ru/images/e/e8/Sapozhenko_alg.pdf (номера страниц не соответствуют печатному изданию)

7. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. — М.: Физматлит, 2005. — 416 с.

8. Алексеев В. Б., Вороненко А. А., Ложкин С. А., Романов Д. С., Сапоженко А. А., Селезнёва С. Н. Задачи по курсу «Основы кибернетики»: 2-е изд. — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ, 2011. — 71 с.
   http://mk.cs.msu.ru/images/a/ab/Задачи_по_курсу_Основы_кибернетики_2011.pdf

7. Особенности организации и контроля аудиторной и самостоятельной работы студентов

Данный вариант курса «Дополнительные главы дискретной математики и кибернетики» является достаточно сложным и объёмным математическим курсом, усвоение которого требует от студентов полноценной и регулярной как аудиторной, так и самостоятельной работы, что невозможно без чёткой организации занятий, строгой дисциплины и систематического контроля. При этом необходимо, чтобы в рамках самостоятельной работы[1] студенты прорабатывали материал, пройденный на предшествующей лекции (семинаре), и желательно, чтобы они *знакомились с материалом предстоящей лекции* (*семинара*).

Информационные объявления, данные о посещаемости и текущей успеваемости студентов вывешиваются на сайте по адресу:
http://mk.cs.msu.ru/index.php/Дополнительные_главы_дискретной_математики_и_кибернетики_(2-й_поток,_3-й_курс)

8. О проведении экзамена по курсу «Дополнительные главы дискретной математики и кибернетики»

По результатам контрольных работ с учётом посещаемости студентов, их работы на лекциях и семинарах, а также самостоятельной работы каждому из них выставляется предварительная оценка.

Студенты с предварительной оценкой «3» или «4», не претендующие на её повышение, а также студенты с предварительной оценкой «5» сдают экзамен по упрощённой форме (без билета и без подготовки) в виде собеседования по программе курса (преимущественно на знание определений и формулировок утверждений) с целью подтверждения своей оценки.

Остальные студенты (с оценками «2», «3-» или с оценками «3» и «4», претендующие на их повышение) получают билет, включающий в себя 2 теоретических вопроса и 1 задачу из трёх различных разделов курса, и после 15–20 минутной подготовки отвечают на него на уровне формулировок, утверждений и идей их доказательства. Если задача в билете относится к разделу, по результатам контрольных которого студент имеет оценку «5», студент от задачи освобождается. После ответа на билет проводится общее собеседование по другим вопросам программы.

Итоговая экзаменационная оценка, как правило, не может отличаться от предварительной оценки больше, чем на 1 балл.

[1] 1 час самостоятельной работы на 1 час аудиторных занятий

9. Планы семинарских занятий на осенний семестр 2020–2021 уч. года

Семинар 1

Множества, допускаемые конечными автоматами. Правоинвариантная эквивалентность. Теоретический материал [1, с. 27–31].

В классе и на дом.

1. Построить диаграмму Мура для автомата в алфавите $\{1, 0\}$, который допускает следующее множество:
   (a) (1) Множество $\{0, 1, \Lambda\}$; (2) Множество $\{0, 1\}^* \setminus \{0, 1, \Lambda\}$;
   (b) Все слова, начинающиеся на 01;
   (c) Все слова длины 3, кроме 110;
   (d) Все слова, содержащие 001;
   (e) Все слова, имеющие вхождения слов 000 и 111.
2. Доказать конечную автоматность множеств:
   (a) Конечное множество X в алфавите $\{a_1, \ldots, a_m\}$; множество $\{a_1, \ldots, a_m\}^* \setminus X$;
   (b) Множество слов в алфавите $\{0, 1\}$, содержащие неперекрывающиеся слова 000, 001, 011;
   (c) Множества вида $0^{n_1}10^{n_2}1\ldots10^{n_k}$, $n_i \geqslant 1$: (a) При каждом фиксированном k; (b) При произвольном k.
3. Построить правоинвариантное отношение эквивалентности конечного индекса, объединением классов эквивалентности которого являются множества:
   (a) $\{\Lambda\}$;
   (b) $\{\Lambda, 0, 1\}$;
   (c) $\{0^n1 \colon n \geqslant 0\}$;
   (d) Слова чётной длины и 1, 111.
4. Для любого $n \geqslant 2$ определить на $\{0, 1\}$ правоинвариантное отношение эквивалентности индекса n.
5. Пользуясь правоинвариантным отношением эквивалентности доказать, что множества в алфавите $\{0, 1\}$ НЕ конечно-автоматны:
   (a) $\{0^n1^{2n}, n \geqslant 1\}$;
   (b) Симметричные слова в любом не однобуквенном алфавите;
   (c) $\{0^{n^2}, n \geqslant 1\}$.

Семинар 2

Теоретико-множественные операции над конечно-автоматными множествами. Недетерминированные автоматы. Операции произведения и итерации. Теоретический материал [1, с. 32–39].

В классе и на дом.

1. Ввести операцию прямого произведения автоматов. Доказать замкнутость конечно-автоматных множеств относительно операций объединения и пересечения.

2. Сохраняют ли операции $\cup$, $\cap$, $\cdot$, $*$ класс не конечно-автоматных множеств?

3. Построить диаграмму Мура и описать множество, допускаемое недетерминированным автоматом:

$$\begin{aligned}
&Q = \{q_1, q_2, q_3\},\\
&f(0, q_1) = \{q_2\}, \quad f(1, q_1) = \{q_1, q_2\},\\
&f(0, q_2) = \{q_3\}, \quad f(1, q_2) = \{q_3\},\\
&f(0, q_3) = \{q_3\}, \quad f(1, q_3) = \{q_2, q_3\},\\
&F = \{q_3\}.
\end{aligned}$$

4. Построить методом детерминизации эквивалентный данному детерминированный автомат:

$$\begin{aligned}
&Q = \{q_1, q_2, q_3\},\\
&f(0, q_1) = \{q_1, q_2\}, \quad f(1, q_1) = \{q_1\},\\
&f(0, q_2) = \{q_2\}, \qquad\quad f(1, q_2) = \{q_2, q_3\},\\
&f(0, q_3) = \{q_1, q_3\}, \quad f(1, q_3) = \{q_1, q_3\},\\
&F = \{q_3\}.
\end{aligned}$$

5. Пусть $\mathcal{A}_i = \{A, Q, f, q_1, F_i\}, i = 1, 2, 3$ (недетерминированные автоматы). Верно ли, что

   (a) При $F_2 = Q \setminus F_1$ выполнено $D(\mathcal{A}_2) = A^* \setminus D(\mathcal{A}_1)$;

   (b) При $F_3 = F_1 \cap F_2$ выполнено $D(\mathcal{A}_3) = D(\mathcal{A}_1) \cap D(\mathcal{A}_2)$.

6. Построить недетерминированный автомат, который допускает произведение автоматных множеств $D(\mathcal{A}) \cdot D(\mathcal{B})$:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}\colon Q = \{q_1, q_2, q_3\},\\
&f(0, q_1) = q_2, \quad f(1, q_1) = q_1,\\
&f(0, q_2) = q_2, \quad f(1, q_2) = q_3,\\
&f(0, q_3) = q_1, \quad f(1, q_3) = q_3,\\
&F = \{q_1, q_3\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}\colon Q = \{q_1, q_2\},\\
&f(0, q_1) = q_1, \quad f(1, q_1) = q_2,\\
&f(0, q_2) = q_1, \quad f(1, q_2) = q_2,\\
&F = \{q_2\}.
\end{aligned}$$

7. Для автомата $\mathcal{A}$ из предыдущей задачи построить недетерминированный автомат, принимающий $D(\mathcal{A})^*$.

8. Построить из множеств $\{0\}, \{1\}$ при помощи объединения, произведения и итерации множество всех слов, содержащих подслово 0001.

9. $A = \{a_1, \dots a_m\}$. Сколько раз необходимо применить операцию итерации, чтобы получить множество $A^* \setminus \{\bar{a}\}$ при помощи объединения, произведения и итерации из множеств вида $\{a_i\}$?

10. Пусть множество X состоит из n слов. Может ли множество $X \cdot X$ содержать больше n^2 слов? Меньше n^2 слов? В точности n^2 слов?

Семинар 3

Регулярные выражения и регулярные множества. Теорема Клини. Теоретический материал [1, с. 40–42].

В классе и на дом.

1. Доказать регулярность множеств слов в алфавите $\{0, 1\}$:
   (a) Любое конечное множество слов и дополнение к конечному множеству;
   (b) Множество слов, содержащих в качестве подслова одно из слов $x_1, \dots, x_n$;
   (c) Множество слов, не содержащих 01;

2. Привести пример бесконечного регулярного множества, которое невозможно получить однократным использованием итерации.

3. Пусть X — регулярное множество в алфавите $\{a_1, \dots, a_m\}$; $Y_1, \dots Y_m$ — регулярные множества в алфавите $\{b_1, \dots, b_n\}$. Доказать, что множество $S^{a_1 \dots a_m}_{Y_1 \dots Y_m} X$ слов, получаемых одновременной заменой букв $a_1, \dots, a_m$ в любом слове из X любыми словами из $Y_1, \dots, Y_n$ соответственно является регулярным.

4. Пусть X — регулярное множество, $\mathrm{Rev}(X)$ — множество обращений слов из X. Доказать, что оно тоже будет регулярным.

5. Пусть X — конечно-автоматное множество в алфавите A, Y — конечно-автоматное множество в однобуквенном алфавите. Обозначим через X/Y множество тех слов из X, длины которых являются длинами слов из Y. Доказать, что множество X/Y конечно-автоматно.

Семинар 4

Детерминированные функции. Построение диаграмм Мура и канонических уравнений. Теоретический материал и примеры решения задач имеются в задачнике.

В классе. Из [7, глава IV]: 1.1 (1, 3, 8, 9), 1.2 (1), 2.1 (1, 6, 16), 2.4 (1, 3), 2.5 (3).

На дом. Из [7, глава IV]: 1.1 (4, 6, 9, 13), 1.2 (2), 2.1 (3, 7), 2.4 (1, 3), 2.5 (3).

Семинар 5

Операции суперпозиции и обратной связи. Построение схем из автоматных элементов. Теоретический материал и примеры решения задач имеются в задачнике.

В классе. Из [7, глава IV]: 2.8 (3, 6), 2.9 (4), 2.13 (1, 4), 2.14 (1, 4), 2.17 (1, 4).

На дом. Из [7, глава IV]: 2.8 (5, 8), 2.9 (5), 2.13 (6, 11), 2.14 (2, 5), 2.17 (2, 5).

Семинар 6

Машины Тьюринга. Функции, вычислимые на машинах Тьюринга. Теоретический материал и примеры решения задач имеются в задачнике.

В классе. Из [7, глава V]: 1.8 (1, 3), 1.4 (2); 1.14 (1, 2, 3, 4, 9, 10), 1.15 (2, 7).

На дом. Из [7, глава V]: 1.8 (2, 6), 1.4 (4), 1.14 (5, 6, 7, 12), 1.15 (4, 6).

Семинар 7

Примитивно-рекурсивные функции. Теоретический материал и примеры решения задач имеются в задачнике. См. также [1, с. 78].

В классе. Из [7, глава V]: 2.1 (9, 10, 12), 2.2 (1, 3); применить операцию примитивной рекурсии к частичным функциям $g(x) = 2x$ и $h(x, y, z) = z - 2$; 2.3 (9, 10, 5), 2.4 (1, 2, 5, 7б).

На дом. Из [7, глава V]: 2.1 (2, 4), 2.4 (3, 7а), 2.3 (7, 8, 9).

Семинар 8

Операции ограниченного суммирования и мультиплицирования. Операция минимизации. Теоретический материал и примеры решения задач имеются в задачнике. См. также [1, с. 102–107].

В классе. Используя операции $\prod_{i\leqslant x}$ и $\sum_{i\leqslant x}$ доказать примитивную рекурсивность функций $\lfloor x/y\rfloor$, $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$, $\lfloor\log_a x\rfloor$, «число делителей x», «число решений полиномиального уравнения в заданном промежутке».

Из [7, глава V]: 2.5 (1, 2, 3, 7, 11), 2.7 (2, 6).

На дом. Используя операции $\prod_{i\leqslant x}$ и $\sum_{i\leqslant x}$ доказать примитивную рекурсивность функций $p(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, где

$$p(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ — простое число.} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$f_1(x)$ — количество чисел вида y^y на отрезке $[0, x]$. $f_2(x)$ — количество чисел вида $2^y \cdot 3^z$ на отрезке $[0, x]$.

Из [7, глава V]: 2.5 (4, 10, 13), 2.7 (3, 5).

Семинар 9

Частично-рекурсивные функции. Теоретический материал и примеры решения задач имеются в задачнике. См. также [1, с. 108–113].

В классе. Из [7, глава V]: 2.8 (1, 2, 5).

Доказать частичную рекурсивность функций:

1. $f^{-1}(x)$, где f — общерекурсивная перестановка (биективная функция) на $\mathbb{N}_0$;
2. $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \{a_1, \ldots, a_m\}, \\ \text{не определено}, & \text{иначе,} \end{cases} \quad a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{N}_0$;
3. $f(x) = \begin{cases} x, & f_1(x) \geqslant f_2(x), \\ \text{не определено}, & \text{иначе,} \end{cases}$

   $f_1(x), f_2(x)$ — примитивно-рекурсивные функции;
4. x/y;
5. $\sqrt{x}$;
6. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{в последовательности } g \text{ есть две единицы на расстоянии } x+1, \\ \text{не определено}, & \text{иначе,} \end{cases}$

   $g(z)$ — примитивно-рекурсивная функция, принимающая значения $0, 1$ (двоичная последовательность).

На дом. Из [7, глава V]: 2.8 (3).

Доказать частичную рекурсивность функций:

1. $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ входит в пересечение областей значений} \\ & \text{частично-рекурсивных функций } g_1(z), g_2(z), \\ \text{не определено}, & \text{иначе;} \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ входит в область значений функции } g, \\ \text{не определено}, & \text{иначе,} \end{cases}$

   $g(z)$ — примитивно-рекурсивная функция, например $z^2, 2^z$;

3. $x - y$;

4. $\log_2 x$;

5. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{в последовательности } g \text{ есть } x+1 \text{ идущих подряд единиц,} \\ \text{не определено}, & \text{иначе,} \end{cases}$

   $g(z)$ — примитивно-рекурсивная функция, принимающая значения $0, 1$ (двоичная последовательность).

Семинар 10

Класс P. Теоретический материал имеется в задачнике.

В классе. Из [8]: 2.3 (2, 4, 5, 7); доказать, что задача определения существенных переменных у функции, заданной таблицей значений, может быть выполнена на машине Тьюринга за полиномиальное время; 2.19 (7), 2.20 (1а, 2а, 2д, 3а, 4а).

На дом. Из [8]: 2.3 (6, 8, 9, 10), 2.19 (1), 2.20 (1г, 2г, 3г).

Семинар 11

P-сводимость и NP-полнота. Теоретический материал имеется в задачнике.

В классе и на дом. Из [8]: 2.5 (рис. 1, 3, 6), 2.17 (задача 5), 2.18 (1), 2.19 (4), 2.20 (1б, 1в, 2б, 3в).

Семинар 12

Постановка задачи синтеза схем для ФАЛ (операторов) из специальных классов, мощностные характеристики этих классов и соответствующие нижние оценки функций Шеннона для их сложности. Инвариантные и квазиинвариантные классы ФАЛ, их структурное описание и особенности, поведение мощностных последовательностей. Теоретический материал [4, §§1,11].

В классе.

1. Выяснить, какие из следующих классов ФАЛ (операторов) являются невырожденными, и получить нижние мощностные оценки (НМО) функций Шеннона для сложности реализации ФАЛ из данных классов СФЭ в стандартном базисе:

   (a) Q — класс ФАЛ, равных 1 при $x_1 = 0$;

   (b) Q — класс ФАЛ, симметричных по БП x_1, x_2, x_3;

   (c) Q — класс ФАЛ, монотонных по БП x_1, x_2;

   (d) Q — класс ФАЛ, равных 0 на наборах с чётном числом 1;

   (e) Q — класс линейных ФАЛ;

(f) Q — класс самодвойственных ФАЛ;

(g) Q — класс симметрических ФАЛ;

(h) Q — класс операторов вида $F = (f_1, f_2, f_3)$ таких, что $f_1 \cdot f_2 \equiv 0$ при $i \neq j$ и $f_1 \vee f_2 \vee f_3 \equiv \equiv 1$.

2. Выделить среди классов ФАЛ из п. 1 квазиинвариантные и инвариантные классы, для которых найти пределы соответствующих им мощностных последовательностей.

3. Найти порождающее множество класса линейных ФАЛ.

На дом.

1. Исследовать на невырожденность и, в случае невырожденности, установить асимптотику НМО функции Шеннона $L^C(Q(n))$ для сложности реализации ФАЛ (операторов) от БП $x_1, \ldots, x_n$ из класса Q, где:

   (a) Q — класс ФАЛ, равных 1 при $x_1 = x_2 = 1$;

   (b) Q — класс ФАЛ, монотонных по x_1 и антимонотонных по x_2;

   (c) Q — класс ФАЛ, у которых любая подфункция от БП x_1, x_2 принадлежит множеству $\{\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ x_1,\ x_2,\ x_1 \vee x_2,\ x_1 \sim x_2\}$;

   (d) Q — класс ФАЛ, симметричных по своим $n, n = 1, 2, \ldots$ существенным БП с рабочими числами вида $a, a+4, a+8, \ldots, a+4k$, где $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ и $k = \lfloor (n-a)/4 \rfloor$;

   (e) Q — класс операторов $F = (f_1, f_2)$ таких, что $f_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \bar{f}_1(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, где набор $\tilde{\beta}$ имеет номер на единицу больше, чем набор $\tilde{\alpha}$, если $\tilde{\alpha} \neq (1, \ldots, 1)$, и равен нулевому набору в противном случае.

2. Выделить среди классов ФАЛ из п. 1 квазиинвариантные и инвариантные классы, для которых найти пределы соответствующих им мощностных последовательностей.

3. Найти порождающее множество инвариантного класса ФАЛ, состоящего из констант и всех монотонных элементарных конъюнкций.

Семинар 13

Синтез схем для ФАЛ из специальных классов, установление асимптотики соответствующих функций Шеннона. Теоретический материал [4, §§2–5].

В классе. Установить асимптотическое поведение функции Шеннона $L^C(Q(n))$ для сложности реализации ФАЛ (операторов) от БП $x_1, \ldots, x_n$ из класса Q, где Q — один из невырожденных классов, указанных в классной задаче 1 семинара 12.

На дом. Установить асимптотическое поведение функции Шеннона $L^C(Q(n))$ для сложности реализации ФАЛ (операторов) от БП $x_1, \ldots, x_n$ из класса Q, где Q — один из невырожденных классов, указанных в домашней задаче 1 семинара 12.

Семинар 14

Сложность не всюду определённых функций, их использование при синтезе схем для ФАЛ из специальных классов. Теорема Храпченко. Теоретический материал [4, §§6–10].

В классе.

1. Найти сложность не всюду определённой ФАЛ f, $f \in \hat{P}_2(3)$, для которой $\tilde{\alpha}_f = (0001\,1222)$.

2. Найти асимптотику функции Шеннона $L^C(Q(n))$ для сложности реализации ФАЛ от БП $x_1, \ldots, x_n$ из класса $Q(n)$, включающего в себя все те ФАЛ, которые обращаются в ноль на наборах куба B^n, имеющих не меньше $n/2$ единиц.

3. Доказать, что $12 \leqslant L^\pi(s_4^2) \leqslant 16$, где s_n^I — симметрическая ФАЛ от n БП, «рабочие» числа которой составляют множество I, $I \subseteq [0, n]$.

4. Доказать, что $L^\pi((x_1 \oplus \ldots \oplus x_k)(x_{k+1} \oplus \ldots \oplus x_n)) \geqslant n^2/2$.

На дом.

1. Найти сложность не всюду определённой ФАЛ f, $f \in \hat{P}_2(3)$, для которой $\tilde{\alpha}_f = (0111\,2221)$.

2. Найти асимптотику функции Шеннона $L^C(Q(n))$ для сложности реализации ФАЛ от БП $x_1, \ldots, x_n$ из класса $Q(n)$, включающего в себя все те ФАЛ, которые обращаются в ноль на наборах куба B^n, имеющих не равное i, $1 \leqslant i \leqslant n-2$ число единиц.

3. Доказать, что $63 \leqslant L^\pi(s_8^{\{2,4,6\}}) \leqslant 80$.

4. Доказать, что $L^\pi((x_1 \oplus \ldots \oplus x_k)(x_{k+1} \oplus \ldots \oplus x_s)(x_{s+1} \oplus \ldots \oplus x_n)) \geqslant n^2/3$, где $1 \leqslant k < s < n$.